电 子 学 报
ACTA ELECTRONICA SINICA

基于 GCTST 变换研究多尺度函数的构造与性质

周小辉[1],王 刚[2]

(1.石河子大学理学院数学系,新疆石河子 832000;2.新疆师范大学数学科学学院,新疆乌鲁木齐 830054)

摘 要: V Strela 提出的两尺度相似变换(TST)在研究多小波的构造与性质中发挥着十分重要的作用.在文中,我们提出了广义共轭两尺度相似变换(GCTST)的概念.利用广义逆矩阵的分解及单边逆的相关理论,详细地研究了 GCTST 变换对矩阵符号特征值影响,这种技巧在其他相关文献中很少使用.证明了 GCTST 可以保持多尺度函数的逼近阶,平衡非平衡的多尺度函数及保持对称性等.通过最后的算例,说明 GCTST 是可行的有效的,而且可以减少或增加多尺度函数的重数.

关键词: GCTST 变换;多尺度函数;广义逆矩阵;小波

中图分类号: TN911 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2013)07-1273-05

电子学报 URL: http://www.ejournal.org.cn **DOI:** 10.3969/j.issn.0372-2112.2013.07.005

On the Construction and Properties of the Multi-Scaling Function via GCTST

ZHOU Xiao-hui[1], WANG Gang[2]

(1. *Department of Mathematics, Polytechnic Institute of Shihezi University, Shihezi, Xinjiang* 832003, *China*;
2. *School of Mathematics Science, Xinjiang Normal University, Urumqi, Xinjiang* 830054, *China*)

Abstract: Two-scale similarity transform(TST) presented by V. Strela is an important role in studying the multi-wavelet. The concept of general conjugate two-scale similarity transform(GCTST) is introduced in this paper. GCTST is the most universal generalization of TST. We discuss how the GCTST change the eigenvalue of the matrix by using the general inverse matrix theory, which the former authors hardly use. Then we show that GCTST can keep the approximation order of the multi-scaling function, balance the unbalanced multi-scaling function and keep the symmetry of the multi-scaling function. By the two examples, we conclude that the GCTST transform is feasible and efficient. GCTST also change the multiplicity of the multi-scaling function.

Key words: general conjugate two-scale similarity transform(GCTST); the multi-scaling function; general inverse matrix; wavelet

1 引言

小波构造与性质的研究是小波理论的核心问题.除了 Haar 小波,不存在其他单小波能够同时具备紧支撑性,正交性,对称性等.为了弥补单小波的不足,人们提出了多小波理论如:GHM 多小波,C-L 多小波等.为了更好的研究多小波的构造与性质,V Strela 提出了两尺度相似变换(TST).人们在此基础上做了大量的研究,并且做了进一步的推广,如杨守志教授提出的 PTST, GTST 等[1,2].本文提出了一种新的不同于 GTST 的变换——广义共轭两尺度相似变换(GCTST).研究 GCTST 变换对矩阵特征值的影响是非常重要的,为了弥补有关 GTST 变换相关文献的不足——没有详尽的研究 GTST 变换对矩阵特征值的影响,我们需要详细地研究了 GCTST 变换对矩阵符号特征值影响.为了完成这一工作,文中利用广义逆矩阵的分解及单边逆的相关理论,这些在其他相关文献中很少使用.这个保证了 GCTST 变换对多尺度函数的两尺度矩阵符号进行变换和 TST 一样,是有效的.同时,GCTST 仍然可以保持 GTST 的优点,如保持多尺度函数的逼近阶,平衡非平衡的多尺度函数及保持对称性等.通过最后的算例,我们还可以知道 GCTST 可以减少或增加多尺度函数的重数.它是 TST, PTST 等更加一般的推广.

本文在第 2 部分很自然的提出广义共轭两尺度相似变换(GCTST),介绍广义逆矩阵的相关理论;在第 3 部分讨论 GCTST 变换对特征值的影响.在第 4 部分讨论

收稿日期:2011-07-29;修回日期:2013-03-06;责任编辑:郭游
基金项目:新疆维吾尔自治区高校科研计划青年教师培育基金(No.XJEDU2009S67)

利用 GCTST 保持多尺度函数的逼近阶,平衡非平衡的多尺度函数及保持对称性等;最后我们给出算例加以说明.

2 预备知识

设 $\boldsymbol{\Phi}(x)=[\varphi_1(x),\varphi_2(x),\cdots,\varphi_r(x)]^{\mathrm{T}}$ 是 r 重正交多尺度函数,并且满足下列两尺度方程:

$$\boldsymbol{\Phi}(x)=\sum_{k\in Z}\boldsymbol{P}_k\boldsymbol{\Phi}(2x-k) \tag{1}$$

其中 $r\times r$ 矩阵序列 $\{\boldsymbol{P}_k\}$ 称为两尺度矩阵序列.

通过对式(1)作 Fourier 变换得到

$$\hat{\boldsymbol{\Phi}}(\omega)=\boldsymbol{P}\left(\frac{\omega}{2}\right)\hat{\boldsymbol{\Phi}}\left(\frac{\omega}{2}\right) \tag{2}$$

其中 $\boldsymbol{P}(\omega)=\frac{1}{2}\sum_{k\in z}\boldsymbol{P}_k\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\omega}$ 是 $\boldsymbol{\Phi}(x)$ 的两尺度矩阵符号.

设一个 s 重细分向量函数 $\tilde{\boldsymbol{\Phi}}(x)$

$$\tilde{\boldsymbol{\Phi}}(x)=\sum_{k\in Z}\boldsymbol{M}_k\boldsymbol{\Phi}(k-x) \tag{3}$$

其中 $\{\boldsymbol{M}_k\}$ 是 $s\times r$ 矩阵,并在式(3)两边进行 Fourier 变换,我们得到

$$\begin{aligned}\hat{\tilde{\boldsymbol{\Phi}}}(\omega)&=\boldsymbol{M}(\omega)\overline{\hat{\boldsymbol{\Phi}}(\omega)}\\&=\boldsymbol{M}(\omega)\overline{\boldsymbol{P}\left(\frac{\omega}{2}\right)}\boldsymbol{N}\left(\frac{\omega}{2}\right)\hat{\tilde{\boldsymbol{\Phi}}}\left(\frac{\omega}{2}\right)=\tilde{\boldsymbol{P}}\left(\frac{\omega}{2}\right)\hat{\tilde{\boldsymbol{\Phi}}}\left(\frac{\omega}{2}\right)\end{aligned}$$

其中 $\boldsymbol{M}(\omega)=\sum_{k\in z}\boldsymbol{M}_k\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\omega}$ 是一个 $s\times r$ 矩阵, $\boldsymbol{N}(\omega)=\sum_{k\in z}\boldsymbol{N}_k\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\omega}$ 是一个 $r\times s$ 矩阵且满足 $\boldsymbol{N}(\omega)\boldsymbol{M}(\omega)=\boldsymbol{I}_r$.那么

定义 1 称 $\tilde{\boldsymbol{P}}(\omega)$ 是 $\boldsymbol{P}(\omega)$ 的广义共轭两尺度相似变换(GCTST),如果

$$\tilde{\boldsymbol{P}}(\omega)=\boldsymbol{M}(2\omega)\overline{\boldsymbol{P}(\omega)}\boldsymbol{N}(\omega) \tag{4}$$

称矩阵 $\boldsymbol{M}(\omega),\boldsymbol{N}(\omega)$ 是 GCTST 的变换矩阵.

根据两尺度矩阵序列 $\{\boldsymbol{P}_k\}$ 定义 band-Toeplitz 矩阵

$$\boldsymbol{L}=\begin{bmatrix}\cdots&&&\\&P_0&P_1&P_2\\&\cdots&&P_0\\&&&\cdots\end{bmatrix}.$$

定义 2 称正交多尺度函数 $\boldsymbol{\Phi}(x)$ 是平衡的,如果低通合成算子 $\boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}$ 能保持 $\boldsymbol{\mu}_0$ 信号不变,即

$$\boldsymbol{L}^T\boldsymbol{\mu}_0=\boldsymbol{\mu}_0$$

其中 $\boldsymbol{\mu}_0=[\cdots,1,1,1,1,1,\cdots]^{\mathrm{T}}$.

引理 1[1] 设 $\boldsymbol{\Phi}(x)$ 是正交多尺度函数,则下列叙述是等价的:

B_1: $\boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\mu}_0=\boldsymbol{\mu}_0$; B_2: $[1,1,\cdots,1]\boldsymbol{P}(0)=[1,1,\cdots,1]$;

B_3: $\hat{\boldsymbol{\Phi}}(0)=[1,1,\cdots,1]^{\mathrm{T}}$.

引理 2[6] 当 $\boldsymbol{A}$ 是行满秩或列满秩矩阵,我们有

(1)若 $\boldsymbol{A}\in\boldsymbol{C}^{m\times n}$,则存在 m 阶正线下三角复矩阵 $\boldsymbol{L}$ 和 n 阶酉矩阵 $\boldsymbol{U}$,使得 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{L}\quad\boldsymbol{O})\boldsymbol{U}$;

(2)若 $\boldsymbol{A}\in\boldsymbol{C}^{m\times n}$,则存在 n 阶正线下三角复矩阵 $\boldsymbol{R}$ 和 m 阶酉矩阵 $\boldsymbol{U}$,使得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{U}\begin{pmatrix}\boldsymbol{R}\\\boldsymbol{O}\end{pmatrix}$.

结合引理 2,我们有

定理 1 设 $\boldsymbol{A}\in\boldsymbol{C}^{m\times n}$ 是右可逆矩阵,则 $\boldsymbol{A}$ 的右逆矩阵是

$$\boldsymbol{G}=\boldsymbol{U}^*\begin{pmatrix}\boldsymbol{L}^{-1}\\\boldsymbol{O}\end{pmatrix}$$

其中 $\boldsymbol{L}$ 是 m 阶正线下三角复矩阵和 $\boldsymbol{U}$ 是 n 阶酉矩阵.

证明 $\boldsymbol{A}\in\boldsymbol{C}^{m\times n}$ 是右可逆矩阵等价于 $\boldsymbol{A}$ 是行满秩矩阵,那么由引理 2 可知,存在 m 阶正线下三角复矩阵 $\boldsymbol{L}$ 和 n 阶酉矩阵 $\boldsymbol{U}$,使得 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{L}\quad\boldsymbol{O})\boldsymbol{U}$.则

$$\boldsymbol{AG}=(\boldsymbol{L}\quad\boldsymbol{O})\boldsymbol{UU}^*\begin{pmatrix}\boldsymbol{L}^{-1}\\\boldsymbol{O}\end{pmatrix}=\boldsymbol{I}_m$$

定理 2 设 $\boldsymbol{A}\in\boldsymbol{C}^{m\times n}$ 是左可逆矩阵,则 $\boldsymbol{A}$ 的左逆矩阵是

$$\boldsymbol{G}=(\boldsymbol{R}^{-1}\quad\boldsymbol{O})\boldsymbol{U}^*$$

其中 $\boldsymbol{L}$ 是 m 阶正线下三角复矩阵和 $\boldsymbol{U}$ 是 n 阶酉矩阵.

类似于定理 1,很容易得到.

3 GCTST 变换对特征值的影响

首先研究 GCTST 对两尺度矩阵符号的特征值的影响.

定理 3 假设 $\boldsymbol{M}(\omega)\in\boldsymbol{C}^{s\times r}$ 是对于所有 ω 右可逆矩阵.若 $\boldsymbol{U}(0)\overline{\begin{pmatrix}P_{s\times s}(0)&P_{s\times(r-s)}(0)\\P_{(r-s)\times s}(0)&P_{(r-s)\times(r-s)}(0)\end{pmatrix}}\boldsymbol{U}(0)^*$ 的第一分块 $s\times s$ 阶矩阵满足条件 $\boldsymbol{E}$,其中 $\boldsymbol{P}(0)=\begin{pmatrix}P_{s\times s}(0)&P_{s\times(r-s)}(0)\\P_{(r-s)\times s}(0)&P_{(r-s)\times(r-s)}(0)\end{pmatrix}$, r 阶酉矩阵 $\boldsymbol{U}(\omega)$ 使得 $\boldsymbol{M}(\omega)=(\boldsymbol{L}(\omega)\quad\boldsymbol{O})\boldsymbol{U}(\omega)$.那么对 $\boldsymbol{P}(\omega)$ 进行 GCTST 所得 $\tilde{\boldsymbol{P}}(0)$ 的特征值是仍然满足条件 $\boldsymbol{E}$.

证明 设 $\boldsymbol{M}(\omega)$ 是对于所有 ω 右可逆矩阵.由引理 2 及定理 1,则存在 s 阶正线下三角复矩阵 $\boldsymbol{L}(\omega)$ 和 r 阶酉矩阵 $\boldsymbol{U}(\omega)$ 使得 $\boldsymbol{M}(\omega)=(\boldsymbol{L}(\omega)\quad\boldsymbol{O})\boldsymbol{U}(\omega)$, $\boldsymbol{N}(\omega)=\boldsymbol{U}(\omega)^*\begin{pmatrix}\boldsymbol{L}^{-1}(\omega)\\\boldsymbol{O}\end{pmatrix}$.

那么

$$\tilde{\boldsymbol{P}}(0)=\boldsymbol{M}(0)\overline{\boldsymbol{P}(0)}\boldsymbol{N}(0)=(\boldsymbol{L}(0)\quad\boldsymbol{O})\boldsymbol{U}(0)\overline{\boldsymbol{P}(0)}\boldsymbol{U}(0)^*\begin{pmatrix}\boldsymbol{L}^{-1}(0)\\\boldsymbol{O}\end{pmatrix}$$

$$=(\boldsymbol{L}(0)\quad\boldsymbol{O})\boldsymbol{U}(0)\overline{\begin{pmatrix}P_{s\times s}(0)&P_{s\times(r-s)}(0)\\P_{(r-s)\times s}(0)&P_{(r-s)\times(r-s)}(0)\end{pmatrix}}\boldsymbol{U}(0)^*\begin{pmatrix}\boldsymbol{L}^{-1}(0)\\\boldsymbol{O}\end{pmatrix}$$

由 $\boldsymbol{U}(0)\overline{\begin{pmatrix}P_{s\times s}(0)&P_{s\times(r-s)}(0)\\P_{(r-s)\times s}(0)&P_{(r-s)\times(r-s)}(0)\end{pmatrix}}\boldsymbol{U}(0)^*$ 的第一分块 $s\times s$ 阶矩阵满足条件 $\boldsymbol{E}$,则 $\tilde{\boldsymbol{P}}(0)$ 的特征值仍然满足条件 $\boldsymbol{E}$.

定理 4 假设 $\boldsymbol{M}(\omega)\in\boldsymbol{C}^{s\times r}$ 是对于所有 ω 左可逆

矩阵.那么对 $\boldsymbol{P}(\omega)$进行 GCTST 所得 $\tilde{\boldsymbol{P}}(0)$的特征值是仍然满足条件 $\boldsymbol{E}$.

证明　设 $\boldsymbol{M}(\omega)\in \boldsymbol{C}^{s\times r}$是对于所有$\omega$左可逆矩阵.由引理 2 及定理 2,则存在 r 阶正线下三角复矩阵$\boldsymbol{R}(\omega)$是和 s 阶酉矩阵 $\boldsymbol{U}(\omega)$使得

$$\boldsymbol{M}(\omega)=\boldsymbol{U}(\omega)\begin{pmatrix}\boldsymbol{R}(\omega)\\ \boldsymbol{O}\end{pmatrix},\boldsymbol{N}(\omega)=(\boldsymbol{R}^{-1}(\omega)\quad \boldsymbol{O})\boldsymbol{U}^{*}(\omega).$$

那么

$$\begin{aligned}\tilde{\boldsymbol{P}}(0)&=\boldsymbol{M}(0)\overline{\boldsymbol{P}(0)}\boldsymbol{N}(0)\\&=\boldsymbol{U}(0)\begin{pmatrix}\boldsymbol{R}(0)\\ \boldsymbol{O}\end{pmatrix}\overline{\boldsymbol{P}(0)}(\boldsymbol{R}^{-1}(0)\quad \boldsymbol{O})\boldsymbol{U}^{*}(0)\\&=\boldsymbol{U}(0)\begin{pmatrix}\boldsymbol{R}(0)\overline{\boldsymbol{P}(0)}\boldsymbol{R}^{-1}(0) & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}\boldsymbol{U}(0)^{*}\end{aligned}$$

容易看出,$\tilde{\boldsymbol{P}}(0)$的特征值仍然满足条件 $\boldsymbol{E}$.

从定理 3 和 4 中,我们知道经过 GCTST 变换后新的两尺度矩阵符号可以生成一个新的多尺度函数,此时它的重数发生了变化.在定理 3 的情形下,$s<r$;在定理 4 的情形下,$s>r$.

注:在 $s=r$ 的情形下,变换矩阵 $\boldsymbol{M}(\omega)$是方阵.式(4)就变成 $\tilde{\boldsymbol{P}}(\omega)=\boldsymbol{M}(2\omega)\overline{\boldsymbol{P}(\omega)}\boldsymbol{M}(\omega)^{-1}$,这就变成共轭两尺度相似变换(CTST),此时需要考虑 $\boldsymbol{M}(0)$是否可逆.我们可以得到类似与 TST 的结论,在另文中做了详细讨论.这里,我们简要给出一些重要结论, 如果 $\boldsymbol{M}(\omega)$对所有 ω 都是可逆的,矩阵 $\tilde{\boldsymbol{P}}(0)$的特征值是 $\boldsymbol{P}(0)$特征值的共轭.如果 $\boldsymbol{M}(0)$是奇异的,相应的结论就不同了,式(4)变成 $\tilde{\boldsymbol{P}}(\omega)=\frac{1}{2}\boldsymbol{M}(2\omega)\overline{\boldsymbol{P}(\omega)}\boldsymbol{M}(\omega)^{-1}$.结论类似于 TST 的结论.

4　GCTST 变换与多尺度函数的逼近阶,平衡性及对称性

基于下面的讨论,我们可知 GCTST 可以保持多尺度函数的逼近阶.

定理 5　设 $\boldsymbol{\Phi}(x)=[\varphi_1(x),\varphi_2(x),\cdots,\varphi_r(x)]^{\mathrm{T}}$是 r 重多尺度函数,对应的两尺度符号为 $\boldsymbol{P}(\omega)$.且 $\boldsymbol{M}(\omega)$是单边逆矩阵,即 $\boldsymbol{N}(\omega)\boldsymbol{M}(\omega)=\boldsymbol{I}_s$.设 $\tilde{\boldsymbol{P}}(\omega)=\boldsymbol{M}(2\omega)\overline{\boldsymbol{P}(\omega)}\boldsymbol{N}(\omega)$是 $\boldsymbol{P}(\omega)$的 GCTST 变换,那么由 $\tilde{\boldsymbol{P}}(\omega)$生成的新的多尺度函数 $\tilde{\boldsymbol{\Phi}}(x)$与 $\boldsymbol{\Phi}(x)$有相同的逼近阶.

证明　设一个细分向量函数 $\tilde{\boldsymbol{\Phi}}(x)=\sum_{k\in Z}\boldsymbol{M}_k\boldsymbol{\Phi}(k-x)$,其中$\{\boldsymbol{M}_k\}$是 $r\times r$ 矩阵,并在两边进行 Fourier 变换,得到

$$\begin{aligned}\hat{\tilde{\boldsymbol{\Phi}}}(\omega)&=\boldsymbol{M}(\omega)\overline{\hat{\boldsymbol{\Phi}}(\boldsymbol{\omega})}\\&=\boldsymbol{M}(\omega)\overline{\boldsymbol{P}(\frac{\omega}{2})}\boldsymbol{N}(\frac{\omega}{2})\hat{\tilde{\boldsymbol{\Phi}}}(\frac{\omega}{2})=\tilde{\boldsymbol{P}}(\frac{\omega}{2})\hat{\tilde{\boldsymbol{\Phi}}}(\frac{\omega}{2})\end{aligned}$$

则 $\tilde{\boldsymbol{P}}(\omega)$生成的新的 $\tilde{\boldsymbol{\Phi}}(x)$是细分多尺度函数.又由 $\boldsymbol{M}(\omega)$对任意的 ω 都是可逆的,那么 $\hat{\boldsymbol{\Phi}}(\omega)=\overline{\boldsymbol{N}(\omega)\hat{\tilde{\boldsymbol{\Phi}}}(\omega)}$.即,存在 $r\times r$ 矩阵序列$\{\boldsymbol{N}_k\}$,$\boldsymbol{N}(\omega)=\sum_{k\in z}\boldsymbol{N}_k\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\omega}$使得 $\boldsymbol{\Phi}(x)=\sum_{l\in Z}\boldsymbol{N}_l\tilde{\boldsymbol{\Phi}}(l-x)$,则 $\boldsymbol{\Phi}(-x)=\sum_{l\in Z}\boldsymbol{N}_l\tilde{\boldsymbol{\Phi}}(l+x)$.

设 $\boldsymbol{\Phi}(x)$有 m 阶逼近阶,可知存在常数行向量 $\boldsymbol{u}_k^j$使得$\boldsymbol{x}^j=\sum_k\boldsymbol{u}_k^j\boldsymbol{\Phi}(x-k)$,$j=0,1,\cdots m-1$.那么,有

$$(-\boldsymbol{x})^j=\sum_k\boldsymbol{u}_k^j\boldsymbol{\Phi}(-x-k)=\sum_k\boldsymbol{u}_k^j\sum_{l\in Z}\boldsymbol{N}_l\tilde{\boldsymbol{\Phi}}(l+x+k),$$

即

$$\boldsymbol{x}^j=\sum_k\sum_{l\in Z}(-1)^j\boldsymbol{u}_k^j\boldsymbol{N}_{-l-k}\tilde{\boldsymbol{\Phi}}(x-l),j=0,1,\cdots m-1.$$

上式说明 $\tilde{\boldsymbol{\Phi}}(x)$有 m 阶逼近阶.定理 5 得证.

从定理 5 可知,GCTST 变换不能提升逼近阶,但是可平衡多尺度函数.

定理 6　设 $\boldsymbol{\Phi}(x)=[\varphi_1(x),\varphi_2(x),\cdots,\varphi_r(x)]^{\mathrm{T}}$是 r 重多尺度函数,对应的两尺度符号为 $\boldsymbol{P}(\omega)$.且 $\boldsymbol{M}(\omega)$是单边逆矩阵,即 $\boldsymbol{N}(\omega)\boldsymbol{M}(\omega)=\boldsymbol{I}_s$.设 $\tilde{\boldsymbol{P}}(\omega)=\boldsymbol{M}(2\omega)\overline{\boldsymbol{P}(\omega)}\boldsymbol{N}(\omega)$是 $\boldsymbol{P}(\omega)$的 GCTST 变换,且满足$[1,1,\cdots,1]\boldsymbol{M}(0)\overline{\boldsymbol{P}(0)}\boldsymbol{N}(0)=[1,1,\cdots,1]$,那么由 $\tilde{\boldsymbol{P}}(\omega)$生成的新的多尺度函数 $\tilde{\boldsymbol{\Phi}}(x)$是平衡的.

证明很容易,由定理 5 与引理 1 显然得到.

若 GCTST 变换中变换矩阵 $\boldsymbol{M}(\omega)$和 $\boldsymbol{N}(\omega)$都是 r 阶的,且满足 $\boldsymbol{N}(\omega)=\boldsymbol{M}(\omega)^{*}$及 $\boldsymbol{M}(\omega)^{*}\boldsymbol{M}(\omega)=\boldsymbol{M}(\omega)\boldsymbol{M}(\omega)^{*}=\boldsymbol{I}_r$.那么 GCTST 变换就转变成特殊的 GCTST 变换,此时它就可以保持多尺度函数的正交性.这种情形下,式(4)变成了 $\tilde{\boldsymbol{P}}(\omega)=\boldsymbol{M}(2\omega)\overline{\boldsymbol{P}(\omega)}\boldsymbol{M}(\omega)^{*}$,此时可以构造一个新的多小波系统.

定理 7　设 $\boldsymbol{\Phi}(x)$是 m 逼近阶的正交多尺度函数,对应的两尺度矩阵符号为 $\boldsymbol{P}(\omega)$,假设 $\tilde{\boldsymbol{P}}(z)$是 $\boldsymbol{P}(\omega)$的 GCTST 变换,其中 $\boldsymbol{M}(\omega)$是一个仿酉矩阵.则 PCTST 保持 $\boldsymbol{\Phi}(x)$的正交性和逼近阶,即 $\tilde{\boldsymbol{P}}(z)$生成的多尺度函数 $\tilde{\boldsymbol{\Phi}}(x)$也是正交的.

证明　由 $\boldsymbol{\Phi}(x)$是正交的,则 $\boldsymbol{P}(\omega)\boldsymbol{P}(\omega)^{*}+\boldsymbol{P}(\omega+\pi)\boldsymbol{P}(\omega+\pi)^{*}=\boldsymbol{I}_r$.

那么

$$\begin{aligned}&\tilde{\boldsymbol{P}}(\omega)\tilde{\boldsymbol{P}}(\omega)^{*}+\tilde{\boldsymbol{P}}(\omega+\pi)\tilde{\boldsymbol{P}}(\omega+\pi)^{*}\\&=\boldsymbol{M}(2\omega)\overline{\boldsymbol{P}(\omega)}\boldsymbol{M}^{*}(\omega)\boldsymbol{M}(\omega)(\overline{\boldsymbol{P}(\omega)})^{*}\boldsymbol{M}^{*}(2\omega)\\&\quad+\boldsymbol{M}(2\omega)\overline{\boldsymbol{P}(\omega+\pi)}\boldsymbol{M}^{*}(\omega+\pi)\\&\quad\cdot\boldsymbol{M}(\omega+\pi)(\overline{\boldsymbol{P}(\omega+\pi)})^{*}\boldsymbol{M}^{*}(2\omega)\\&=\boldsymbol{M}(2\omega)[\overline{\boldsymbol{P}(\omega)}(\overline{\boldsymbol{P}(\omega)})^{*}\boldsymbol{M}^{*}(2\omega)\\&\quad+\boldsymbol{M}(2\omega)\overline{\boldsymbol{P}(\omega+\pi)}(\overline{\boldsymbol{P}(\omega+\pi)})^{*}]\boldsymbol{M}^{*}(2\omega)\\&=\boldsymbol{I}_r\end{aligned}$$

定理 7 得证.

对称性是多尺度函数的重要性质,下面我们给出 GCTST 变换对多尺度函数对称性的影响.

设 $\boldsymbol{\Phi}(x)=[\varphi_1(x),\varphi_2(x),\cdots,\varphi_r(x)]^{\mathrm{T}}$ 是 r 重多尺度函数,那么它的所有分量是对称或反对称的当且仅当

$$\hat{\boldsymbol{\Phi}}(\omega)=\boldsymbol{E}(\omega)\overline{\hat{\boldsymbol{\Phi}}(\omega)},$$
$$\boldsymbol{E}(\omega)=\mathrm{diag}(\pm\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2T_1\omega},\cdots,\pm\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2T_r\omega}) \tag{5}$$

其中 T_i 表示 $\varphi_i(x)$的对称中心.$\boldsymbol{E}(\omega)$对任意 ω 是可逆的.

引理 3 设 $\boldsymbol{P}(\omega)$是对称或反对称细分函数向量 $\boldsymbol{\Phi}(x)$的面具符号,那么

$$\boldsymbol{P}(\omega)=\boldsymbol{E}(2\omega)\overline{\boldsymbol{P}(\omega)}\boldsymbol{E}(\omega)^{*} \tag{6}$$

其中 $\boldsymbol{E}(\omega)$是式(5)定义的.

现在我们研究 GCTST 变换对多尺度函数 $\boldsymbol{\Phi}(x)$对称性的影响.设对称或反对称细分函数向量 $\boldsymbol{\Phi}(x)$,令新多尺度函数

$$\hat{\tilde{\boldsymbol{\Phi}}}(\omega)=\boldsymbol{M}(\omega)\overline{\hat{\boldsymbol{\Phi}}(\omega)}=\boldsymbol{M}(\omega)\overline{\boldsymbol{P}(\frac{\omega}{2})}\boldsymbol{N}(\frac{\omega}{2})\hat{\tilde{\boldsymbol{\Phi}}}(\frac{\omega}{2})$$
$$=\tilde{\boldsymbol{P}}(\frac{\omega}{2})\hat{\tilde{\boldsymbol{\Phi}}}(\frac{\omega}{2}),$$

那么 $\tilde{\boldsymbol{P}}(\omega)=\boldsymbol{M}(2\omega)\overline{\boldsymbol{P}(\omega)}\boldsymbol{N}(\omega)$.同时又有

$$\boldsymbol{P}(\omega)=\boldsymbol{E}(2\omega)\overline{\boldsymbol{P}(\omega)}\boldsymbol{E}(\omega)^{-1},\text{则}$$
$$\tilde{\boldsymbol{P}}(\omega)=\boldsymbol{M}(2\omega)\overline{\boldsymbol{P}(\omega)}\boldsymbol{N}(\omega)$$
$$=\boldsymbol{M}(2\omega)\boldsymbol{E}(2\omega)^{-1}\boldsymbol{P}(\omega)\boldsymbol{E}(\omega)\boldsymbol{N}(\omega)$$

假设GCTST后仍然是$\tilde{\boldsymbol{\Phi}}(x)$是对称的,$\hat{\tilde{\boldsymbol{\Phi}}}(\omega)=\tilde{\boldsymbol{E}}(\omega)\overline{\hat{\tilde{\boldsymbol{\Phi}}}(\omega)}$,$\tilde{\boldsymbol{E}}(\omega)=\mathrm{diag}(\pm\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\tilde{T}_1\omega},\cdots,\pm\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\tilde{T}_r\omega})$那么有 $\tilde{\boldsymbol{P}}(\omega)=\tilde{\boldsymbol{E}}(2\omega)\overline{\boldsymbol{P}(\omega)}\tilde{\boldsymbol{E}}(\omega)^{-1}$.于是,$\tilde{\boldsymbol{P}}(\omega)=\tilde{\boldsymbol{E}}(2\omega)\overline{\boldsymbol{M}(2\omega)}\boldsymbol{P}(\omega)\overline{\boldsymbol{N}(\omega)}\tilde{\boldsymbol{E}}(\omega)^{-1}$,则

$$\boldsymbol{M}(2\omega)\boldsymbol{E}(2\omega)^{-1}=\tilde{\boldsymbol{E}}(2\omega)\overline{\boldsymbol{M}(2\omega)}$$
$$\text{且}\quad \boldsymbol{E}(\omega)\boldsymbol{N}(\omega)=\overline{\boldsymbol{N}(\omega)}\tilde{\boldsymbol{E}}(\omega)^{-1} \tag{7}$$

定理 8 设 $\boldsymbol{\Phi}(x)$和 $\tilde{\boldsymbol{\Phi}}(x)$都是对称或反对称的细分函数向量.且有$\hat{\tilde{\boldsymbol{\Phi}}}(\omega)=\boldsymbol{M}(\omega)\overline{\hat{\boldsymbol{\Phi}}(\omega)}$,那么 $\boldsymbol{M}(\omega)$满足式(7),其中 $\boldsymbol{E}(\omega)=\mathrm{diag}(\pm\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2T_1\omega},\cdots,\pm\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2T_r\omega})$,$\tilde{\boldsymbol{E}}(\omega)=\mathrm{diag}(\pm\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\tilde{T}_1\omega},\cdots,\pm\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\tilde{T}_r\omega})$并且 T_i 表示 $\varphi_i(x)$的对称中心,$\tilde{T}_i$ 表示$\tilde{\varphi}_i(x)$的对称中心.

5 算例

例1 根据文献[3]中例 1 构造出了一个长为 2 的正交对称与反对称的低通滤波器,它们分别是

$$\boldsymbol{P}_0=\begin{pmatrix}1 & 0\\ \cos\theta & \sin\theta\end{pmatrix},\boldsymbol{P}_1=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -\cos\theta & \sin\theta\end{pmatrix}$$

即

$$\boldsymbol{P}(\omega)=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega} & 0\\ (1-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega})\cos\theta & (1+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega})\sin\theta\end{pmatrix}$$

选取变换矩阵 $\boldsymbol{M}(\omega)=\left[\frac{1+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega}}{2},\frac{1-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega}}{2}\right]$,$\boldsymbol{N}(\omega)=\left[\frac{1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega}}{2},\frac{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega}}{2}\right]^{\mathrm{T}}$,容易验证 $\boldsymbol{M}(\omega)\boldsymbol{N}(\omega)=1$.

则 $\boldsymbol{N}(\omega)$是 $\boldsymbol{M}(\omega)$右逆矩阵,那么 $\tilde{\boldsymbol{P}}(\omega)=\boldsymbol{M}(2\omega)\overline{\boldsymbol{P}(\omega)}\boldsymbol{N}(\omega)$,即

$$\tilde{\boldsymbol{P}}(\omega)=\frac{(1+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\omega})(1+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega})(1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega})+(1-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\omega})(1-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega})(1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega})\cos\theta+(1-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\omega})(1+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega})(1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega})\sin\theta}{8}$$

容易得到 $\tilde{\boldsymbol{P}}(0)=1$,$\tilde{\boldsymbol{P}}(\pi)=0$,那么 $\tilde{\boldsymbol{P}}(\omega)$可以生成一个新的单尺度函数 $\varphi(x)$.

在文献[1]中讨论用单尺度函数构造多尺度函数的方法,例 1 说明 GCTST 变换可以将多尺度函数构造单尺度函数.和以往的 TST,PTST 等变换有着很大的不同,是它们更加一般的推广.

例 2 设 $\varphi(x)$是 Haar 尺度函数,且 $p(\omega)=\frac{1+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega}}{2}$是它的两尺度矩阵符号.选取变换矩阵

$$\boldsymbol{M}(\omega)=\left[\frac{1+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega}}{2},\frac{1-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega}}{2}\right]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{N}(\omega)=\left[\frac{1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega}}{2},\frac{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega}}{2}\right].$$

很容易验证 $\boldsymbol{N}(\omega)\boldsymbol{M}(\omega)=1$.设 2×2 阶符号矩阵 $\tilde{\boldsymbol{P}}(\omega)$是 $p(\omega)$关于变换矩阵 $\boldsymbol{M}(\omega)$和 $\boldsymbol{N}(\omega)$的 GCTST 变换.即

$$\tilde{\boldsymbol{P}}(\omega)=\boldsymbol{M}(2\omega)\frac{1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega}}{2}\boldsymbol{N}(\omega)$$
$$=\frac{1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega}}{8}\begin{bmatrix}1+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\omega}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega}+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega} & 1+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\omega}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega}\\ 1-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\omega}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega}+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega} & 1-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\omega}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega}\end{bmatrix}$$

很容易验证 $\tilde{\boldsymbol{P}}(0)$满足条件 $\boldsymbol{E}$,则 $\tilde{\boldsymbol{P}}(\omega)$可以生成一个新的多尺度函数 $\boldsymbol{\Phi}(x)=[\varphi_1(x),\varphi_2(x)]^{\mathrm{T}}$.

由于 $\tilde{\boldsymbol{P}}(\omega)=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}\overline{\tilde{\boldsymbol{P}}(\omega)}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$,我们可以得到 $\boldsymbol{\Phi}(x)$是关于 0 点对称和反对称的.但是它不是平衡的.

如果选取 $\boldsymbol{M}^{\mathrm{new}}(\omega)=\left[a\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\omega},(\frac{1}{b}-a)\mathrm{e}^{\mathrm{i}l\omega}\right]^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{N}^{\mathrm{new}}(\omega)=[b\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\omega},b\mathrm{e}^{-\mathrm{i}l\omega}]$,其中 $k,l\in Z$,我们可以验证下面的等式:

$$\boldsymbol{N}^{\mathrm{new}}(\omega)\boldsymbol{M}^{\mathrm{new}}(\omega)=1,$$
$$[1,1]\boldsymbol{N}^{\mathrm{new}}(0)\boldsymbol{M}^{\mathrm{new}}(0)=[1,1],$$
$$\tilde{\boldsymbol{P}}(\omega)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\omega}\begin{bmatrix}\mathrm{e}^{\mathrm{i}4k\omega} & 0\\ 0 & \mathrm{e}^{\mathrm{i}4l\omega}\end{bmatrix}\overline{\tilde{\boldsymbol{P}}(\omega)}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega}\begin{bmatrix}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2k\omega} & 0\\ 0 & \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2l\omega}\end{bmatrix}$$

由引理 4 和定理 6,可知 $\boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{new}}(x)$是对称平衡的多尺度函数.

例 2 说明了 GCTST 变换可以用单尺度函数构造多尺度函数,并且选取适当的变换矩阵,可以使得多尺度函数具有一些好的性质,如对称性,平衡性.结合了例 1

和例 2,我们可以知道 GCTST 变换可以减少或增加多尺度函数的重数来构造新的多尺度函数,同时可以考虑复数域的情形.因此,GCTST 变换更加具有一般性,是更进一步的推广.

参考文献

[1] Yang Shouzhi,Huang Yongdong.Construction of a class of compactly supported symmetric and balanced refinable function vector by GTST[J].Appl Math and computation,2009,(7):83 – 89.

[2] Yang Shouzhi,Peng Lizhong.The construction of orthogonal multi – scaling functions with high balance order based on PTST[J].Science in China Series E:Information Science,2006,36(6):644 – 656.

[3] SUN Lei,CHENG Zhengxin.Construction of symmetric/antisymmetric compactly supported orthogonal multiwavelets [J].Mathematics in practice and theory,2008,(6):169 – 174.

[4] Vasily S.Multiwavelets:Theory and Applications[M].USA:MIT,1996.

[5] L Shen,H H Tan,J Y Tham.Symmetric-antisymmetric orthonarmal multiwavelets and related scalar wavelets[J].Applied and Computational Harmonic Analysis,2000,8(3):258 – 279.

[6] Huang Ting-zhu,Zhong Shou-ming,Li Zheng-liang.Matrix Theory[M].Higher Education Press,2003,First Edition.

[7] GUO Qi,WU Long.A wavelet approach fitting to signals in multi-exponential decay[J].Chinese Journal of Electronics,2012,21(2):260 – 264.

[8] 任三孩,常文革,刘向君.一种基于小波变换和变尺度圆模板融合的景象匹配算法[J].电子学报,2011,39(9):2200 – 2203.
REN San-hai,CHANG Wen-ge,LIU Xiang-jun.A scene matching method based on wavelet transform and multi-scale circular template fusion[J].Acta Electronica Sinica,2011,39(9):2200 – 2203.(in Chinese)

作者简介

周小辉　男,1986 年 2 月生,江苏常州人.硕士,讲师,主要研究方向为微分几何、小波分析及其应用.

E-mail:zhou001900@163.com

王　刚(通讯作者)　男,1971 年生,新疆乌鲁木齐人.博士,教授,硕士生导师,主要研究方向为小波分析及其应用.

E-mail:angelayy@sina.com